

## Trinôme du second degré

Un trinôme du second degré est une fonction

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$$

Les racines de  $P$  sont les solutions à  $P(x) = 0$ ,

Si une racine existe,  $P$  admet une factorisation:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (1)$$

(comment trouver  $x_1$  et  $x_2$ ? (supposons qu'ils existent et  $x_1 < x_2$ ))

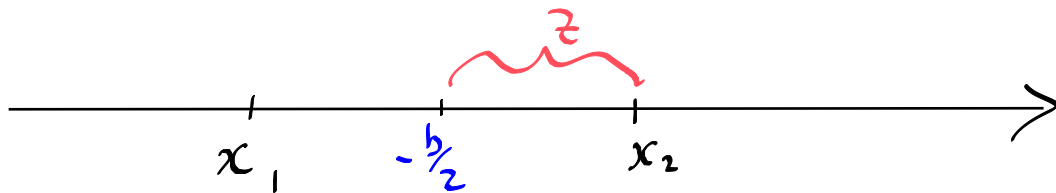
En développant (1) on voit que

$$ax_1x_2 = c \text{ et } a(x_1 + x_2) = -b$$

Pour simplifier l'écriture, supposons que  $a = 1$

$$x_1x_2 = c \text{ et } x_1 + x_2 = -b \quad (2)$$

alors la moyenne de  $x_1$  et  $x_2$  est  $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2}$



$$\Rightarrow \exists z > 0 \text{ tel que } x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm z$$

Mais de (2) nous avons

$$x_1x_2 = \left(\frac{b}{2} - z\right)\left(\frac{b}{2} + z\right) = c; \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2 = c$$

$$z^2 = \frac{b^2}{4} - c; \quad z = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$\text{si } \frac{b^2}{4} - c > 0! \quad (*)$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \quad (3)$$

Rem. Si  $a \neq 1$ , nous avons

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

donc, pour trouver  $x_1$  et  $x_2$ , on remplace

$b$  par  $\frac{b}{a}$  et  $c$  par  $\frac{c}{a}$  dans (3):

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

$$\text{si } b^2 - 4ac = \Delta > 0!$$

En résumé:

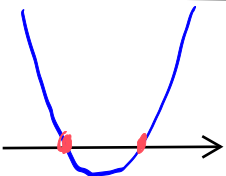
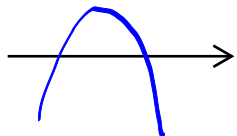
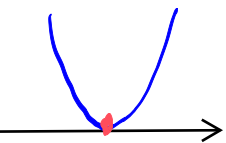
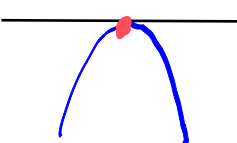
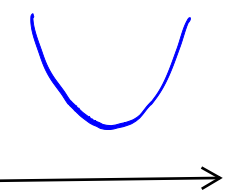
- Si  $\Delta > 0$ , 2 racines :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si  $\Delta = 0$ , 1 racine :  $x_1 = \frac{-b}{2a}$

- Si  $\Delta < 0$ , pas de racines !

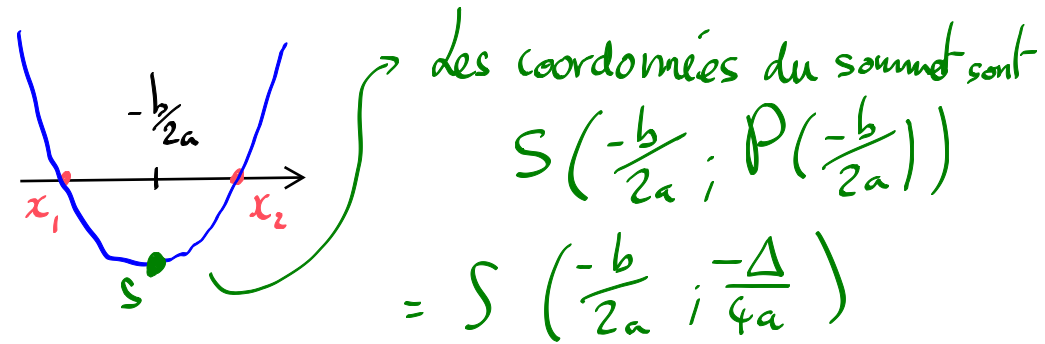
Le graphe de  $P(x) = ax^2 + bx + c$  est une **parabole**.  
Ses aspects possibles sont illustrés dans ce tableau :

| $\Delta \backslash a$ | $> 0$                                                                               | $< 0$                                                                               |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $> 0$                 |   |   |
| $= 0$                 |  |  |
| $< 0$                 |  |  |

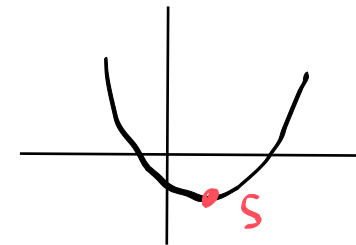
Rem.

$ax^2 + bx + c$   
a le signe  
opposé de  
 $a$  entre les  
racines et  
le m<sup>ême</sup> signe  
sinon.

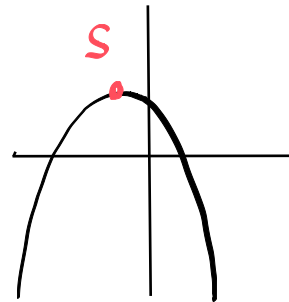
Comme nous avons vu, la moyenne  
des (éventuelles) racines est  $\frac{-b}{2a}$  :



Le sommet donne un **minimum**  
si  $a > 0$  :



et un **maximum** si  $a < 0$  :



# Problèmes avec paramètre

Problème 1:

Soit

$$P(x) = (2m+1)x^2 + 2(m-1)x + (m-3)$$

Pour quelles valeurs de  $m$ ,  $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ?

$$P(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \text{ pas de zéros} & (1) \\ a = 2m+1 > 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 4(m-1)^2 - 4(2m+1)(m-3) < 0$$

$$-4m^2 + 12m + 16 < 0; \quad -4(m^2 - 3m - 4) < 0$$

$$-4(m-3)(m+1) < 0$$

$\hookrightarrow$   $\hat{m}$  signe que  $a$ , donc sur les bords

$$S_1 = ]-\infty; -1[ \cup ]4; +\infty[$$

$$(2) \quad 2m+1 > 0; \quad 2m > -1; \quad m > -\frac{1}{2}$$

$$S_2 = ]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

Solution finale

$$S_1 \cap S_2 = (]-\infty; -1[ \cup ]4; +\infty[) \cap ]-\frac{1}{2}; +\infty[ \\ = ]4; +\infty[$$

Problème 2:

Combien de pts d'intersection entre

$P(x) = x^2 + mx + 1$  et la droite  $y = x$

Pt. d'intersection:  $P(x) = x$

$$x^2 + mx + 1 = x; \quad x^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4 = (m-3)(m+1)$$

• si  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in ]-\infty; -1[ \cup ]3; +\infty[$

$\hookrightarrow$  2 pts d'intersection

• si  $\Delta = 0 \Leftrightarrow m \in \{3; -1\}$

$\hookrightarrow$  1 pt d'intersection

• si  $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in ]-3; 1[$

$\hookrightarrow$  0 pts d'intersection

Problème 3 :

Soit  $P(x) = mx^2 - mx - (m+1)$   $m \neq 0$

Pour quelles valeurs de  $m$   $P(x)$  a 2 racines  $x_{1,2}$  tel que  
 $-2 \leq x_1 < 1 < x_2$  ?

(1) 2 racines distinctes  $\Leftrightarrow \Delta > 0$

(2) 1 est 'entre les racines'

$$\begin{aligned} P(1) < 0 & \text{ si } a > 0 \Leftrightarrow P(1) \cdot a < 0 \\ P(1) > 0 & \text{ si } a < 0 \end{aligned}$$

(3) -2 n'est pas 'entre les racines'

$$\begin{aligned} P(-2) \geq 0 & \text{ si } a > 0 \\ P(-2) \leq 0 & \text{ si } a < 0 \end{aligned} \Leftrightarrow aP(-2) \geq 0$$

(1):  $m^2 + 4m(m+1) > 0$

$$m(m+4(m+1)) > 0 ; m(5m+1) > 0$$

$$S_1 = ]-\infty ; -\frac{4}{5}[ \cup ]0 ; +\infty[$$

$$(2) m \cdot P(-1) < 0 \Leftrightarrow m[m - m - (m+1)] < 0$$

$$-m(m+1) < 0 ; S_2 = ]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$$

$$(3) m \cdot P(-2) > 0 \Leftrightarrow m[m(-2)^2 - m(-2) - (m+1)] > 0$$

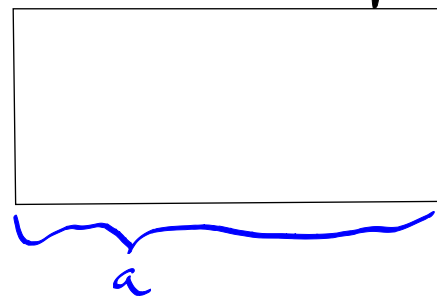
$$m(5m-1) > 0 ; S_3 = ]-\infty ; 0[ \cup ]\frac{1}{5} ; +\infty[$$

On exclut 0, car  $m \neq 0$   $\rightarrow$

Solution finale :

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (]-\infty ; -\frac{4}{5}[ \cup ]0 ; +\infty[ ) \\ &\cap (]-\infty ; -1[ \cup ]0 ; +\infty[ ) \cap (]-\infty ; 0[ \cup ]\frac{1}{5} ; +\infty[ ) \\ &= ]-\infty ; -1[ \cup ]\frac{1}{5} ; +\infty[ \end{aligned}$$

Problème 4 : (problème d'optimisation)



Quelles dimensions  
 $a, b$  maximisent  
 l'aire avec un  
 périmètre de 12 ?

On a

$$\text{Périmètre} = 2a + 2b = 12 \text{ et}$$

$$\text{Aire} = ab$$

On doit exprimer la quantité à optimiser (l'aire) comme une fonction d'une seule variable :

$$12 = 2a + 2b; \quad b = \frac{12 - 2a}{2} = 6 - a$$

$$\hookrightarrow a \in ]0; 6[$$

$$\text{Aire}(a) = a(6 - a) = -a^2 + 6a$$

$\hookrightarrow$  parabole orientée vers le bas :

Le maximum se trouve en

$$a = \frac{6 + 0}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \underline{a = b = 3}$$

